

Сергей ПАХОМОВ

# Гравитационный конус



**С. В. Пахомов**

# **ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОНУС**



Москва ♦ Ижевск

2016

УДК 539.121.7

ББК 22.313.3

П21

---

Интернет-магазин

MAHES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - робототехника
  - нефтегазовые технологии
- 

**Пахомов С. В.**

П21 Гравитационный конус. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. — 40 с.

ISBN 978-5-4344-0417-4

Вводится геометрическая конструкция «гравитационный конус» для визуализации и решения задачи Кеплера методом построения. Стереометрическая задача сечения конической поверхности с последующим проецированием в плоскость орбиты сводится к набору правил построений на плоскости. Совмещение радиус-вектора с годографом скорости в одной конструкции выявляет роль двух фокусов в построении конических сечений.

Данное издание носит открытый характер. Электронная версия доступна по адресам: [http://sobaka.udmweb.ru/Gravity\\_Cone\\_rus.pdf](http://sobaka.udmweb.ru/Gravity_Cone_rus.pdf), <http://elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/15753> для некоммерческого использования.

Научно-популярное издание.

Научный редактор: заведующий кафедрой небесной механики СПбГУ, д. ф.-м. н., профессор, заслуженный деятель науки РФ К. В. Холшевников.

**УДК 539.121.7**

**ББК 22.313.3**

**ISBN 978-5-4344-0417-4**

© С. В. Пахомов, текст, рисунки,  
обложка, 2016

---

---

## Предисловие научного редактора

Работа адресована всем увлекающимся астрономией, космонавтикой, математическими головоломками. Может использоваться на практических занятиях по построению кеплеровских орбит. Всем известно, что орбиты планет, спутников, астероидов, комет в хорошем приближении являются коническими сечениями. Но в многочисленных учебниках и справочниках вы найдете множество рисунков орбит, но ни одного конуса! В этой книге показано, что введение конуса, сечение которого дает нужную нам орбиту, может быть практически полезным, и предлагаются способы построений в редакторах двумерной и трехмерной графики. Современные компьютерные средства визуализации позволяют на новом уровне решать геометрические задачи на построение. С другой стороны, простая и понятная связь правил построения с моделью конуса обеспечивает ясное понимание всех действий.

Выявленная связь двух фокусов конических сечений позволяет по-новому взглянуть на привычные закономерности. Как правило, о втором фокусе в учебниках пишется лишь одна фраза, где он именуется пустым. Однако укажем, что важная роль пустого фокуса была отмечена еще Ньютоном для задачи о поступательно-вращательном движении Луны (и многих других спутников, для которых период обращения вокруг планеты совпадает с периодом вращения вокруг своей оси): видимая сторона Луны смотрит не на Землю, а почти точно на пустой фокус.

Работа представлялась в 2016 году на методическом совете детского математического лагеря «Алеф», научном семинаре ИГЗ УдГУ, семинаре теоретического отдела ФТИ УрО РАН.

Профессор К. В. Холшевников



---

---

## Оглавление

Математический спутник.....	10
Коническая поверхность.....	13
Линия вторых фокусов.....	16
Коники: секреты построений.....	21
Параболоид постоянной энергии .....	24
Проекционные свойства параболы и параболоида .....	27
Правила построений на плоскости орбиты.....	30
Двойной циферблат: радиус-вектор и приведенный годограф .....	31
Космическое оригами.....	34
Примеры задач .....	34
Инструмент для обучения.....	36
Литература.....	39



*Посвящается  
445-летию  
Иоганна Кеплера*





---

---

В формулировке первого закона Кеплера таится удивительная загадка о назначении второго фокуса космических орбит. В самом деле, закон гласит: «Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце» [1, с. 23]. Но почему траектория планеты, когда эта планета, то приближаясь к Солнцу с ускорением, то удаляясь от него с замедлением, вдруг оказывается симметричной? Участки траектории, пройденные планетой с разными скоростями (а значит, и за разное время), абсолютно совпадают при наложении друг на друга. А Солнце находится не в центре симметричной траектории, а лишь «в одном из фокусов».

Подобное удивление испытывает каждый, кто впервые сталкивается с коническими сечениями. Если от прямого кругового конуса отсечь под углом «макушку», то в сечении получится опять же симметричный эллипс, хотя радиус кривизны конической поверхности растёт по мере удаления от вершины. Наш обыденный житейский опыт ошибочно подталкивает к неправильному ответу. Ожидание увидеть что-то яйцеобразное порождает изумление при виде более симметричной фигуры. Возникает предположение о некой скрытой закономерности.

Что же находится во втором фокусе? Каким образом взаимодействие между Солнцем и планетой приводит к «избыточной» симметрии траектории планеты?

И вообще, где тот конус, сечения которого задают орбиты? Обычно преподаватели в этом случае говорят о математической абстракции, но мы покажем, что ответы на эти «детские» вопросы могут быть более содержательными.

Цель данной работы — продемонстрировать графический способ решения задачи Кеплера. Для этого привлекается дополнительная виртуальная размерность. Но прежде чем строить что-то новое, напомним основные закономерности кеплеровских орбит.

## Математический спутник

Под задачей Кеплера (рис. 1) будем понимать движение материальной точки единичной массы  $S$  в поле неподвижного точечного гравитационного центра притяжения  $C$ . Нулевые размеры взаимодействующих тел позволяют не ограничиваться конечными значениями силы взаимодействия и скорости, а также включить в рассмотрение вырожденные орбиты в виде двойного отрезка между центром притяжения и точкой максимального удаления спутника. Такая орбита как предельный случай «сплюснутого» эллипса претерпевает качественный скачок, — она перестает быть замкнутой, поскольку проходит через точку, в которой находится притягивающий центр. В реальных случаях эллиптические орбиты «разрываются», когда радиус-вектор орбиты становится меньше радиуса (размера) притягивающего центра. Движущуюся точку будем называть спутником, а центр притяжения — центром. Следует отличать этот центр от центра эллипсов и гипербол. Рассматриваются как локализованные орбиты, так и открытые. В силу особой важности этой модельной механической системы уместно дать ей специальное название — *математический спутник*.

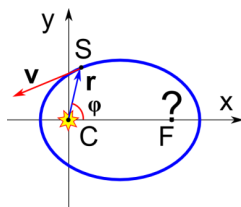


Рис. 1. Эллиптическая орбита спутника  $S$  вокруг центра притяжения  $C$ . Синяя стрелка — радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , красная — скорость  $\mathbf{v}$ ,  $\varphi$  — угол между радиус-вектором и осью  $x$  (направлением вектора Лапласа)

Уравнение движения спутника в поле центра имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор в направлении радиус-вектора,  $\mu$  — гравитационный параметр.

Орбиты спутника представляют собой конические сечения:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол поворота радиус-вектора в плоскости орбиты,  $p$  — фокальный параметр,  $\varepsilon$  — эксцентриситет.

Во время движения спутника сохраняются: полная энергия  $E$ , момент скорости  $\mathbf{M}$ , вектор Лапласа  $\mathbf{L}$  [2, с. 13; 3, с. 16]

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\mathbf{L} = \mu \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v} \times \mathbf{M}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость спутника.

Семь величин (одна скалярная и две векторные), которые задаются уравнениями (3)–(5), связаны между собой так, что независимыми остаются только шесть. Например, в качестве начальных условий можно задать 3 компоненты радиус-вектора и 3 компоненты вектора скорости.

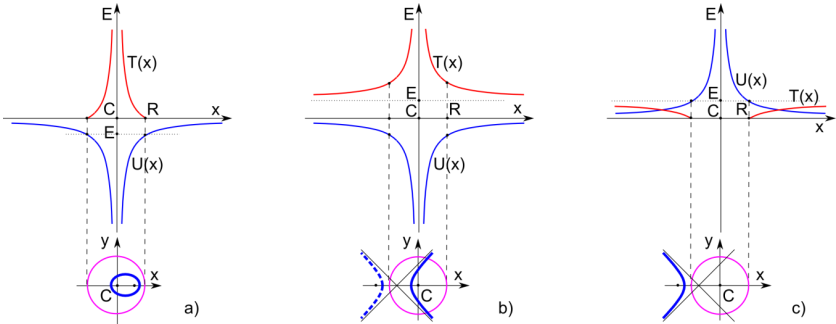


Рис. 2. График гравитационного потенциала  $U$  и кинетической энергии  $T$  вдоль произвольного направления, проходящего через центр  $C$ . Ниже показаны примеры орбит.  $E$  — полная энергия,  $R$  — радиус большого круга (определение в тексте): а)  $E < 0$  — локализованные орбиты; б)  $E > 0$  — открытые орбиты; в) «отталкивающийся» спутник

Характерным размером орбиты можно считать большую ось конических сечений  $2a$ . При постоянной отрицательной энергии ( $E < 0$ ) большая ось эллипса равна:

$$2a = -\frac{\mu}{E}. \quad (6)$$

При положительной энергии ( $E > 0$ ) большая ось гиперболы равна:

$$2a = \frac{\mu}{E}. \quad (7)$$

Для орбит удобно ввести понятие «*большой круг*». Границей его служит окружность вокруг центра притяжения с радиусом  $R = \frac{\mu}{|E|}$ . Она ограничивает область возможных орбит для отрицательных энергий. Большой круг — это область, из которой спутник с заданной отрицательной энергией ни при каких начальных условиях выйти не может (рис. 2, *a*).

При положительных энергиях спутник может оказаться в любой точке пространства, но в большой круг не может проникнуть извне другой (воображаемый) спутник, который отличается от первого только тем, что он не притягивается, а отталкивается от центра с той же по модулю силой. Отталкивание реализуется, например, в задаче кулоновского потенциала с одноименными отталкивающимися зарядами. Такой «*отталкивающийся*» спутник летит по орбите, которой соответствует 2-я ветвь гиперболы с уравнением [4, с. 77]:

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (8)$$

Этот «отталкивающийся» спутник ни при каких начальных условиях при данной энергии не сможет зайти в область большого круга (рис. 2, *b*). Две ветви гиперболы — решения уравнений (2) и (8) (с общими параметрами) с геометрической точки зрения — одно сечение конической поверхности, которое характеризуется значением эксцентриситета  $\varepsilon$  и размером большой оси  $2a$  (7). Поэтому в дальнейшем мы будем их строить как одну кривую, состоящую из двух ветвей.

Предельные орбиты — вырожденные случаи с  $\varepsilon = 1$  и  $p = 0$ . Поскольку предельная траектория проходит точно через центр притяжения, в этой точке происходит разрыв. При отрицательных энергиях эллипс схлопывается в двойной отрезок (см. пояснения выше). При положительных энергиях гипербола — в два луча. При этом спутник летит вдоль радиус-вектора (в лобовую к центру) и в экстремальных точках достигает границы большого круга. Примечательно, что для орбиты «двойного отрезка», несмотря на то, что спутник входит в область бесконечно глубокого потенциала и при этом развивает бесконечную скорость, время прохода всей орбиты (если стартовать в центре притяжения и там же финишировать с противоположной стороны) совпадает с периодом движения по эллипсу с тем же размером большой оси  $2a$  (равенство (6) и третий закон Кеплера).

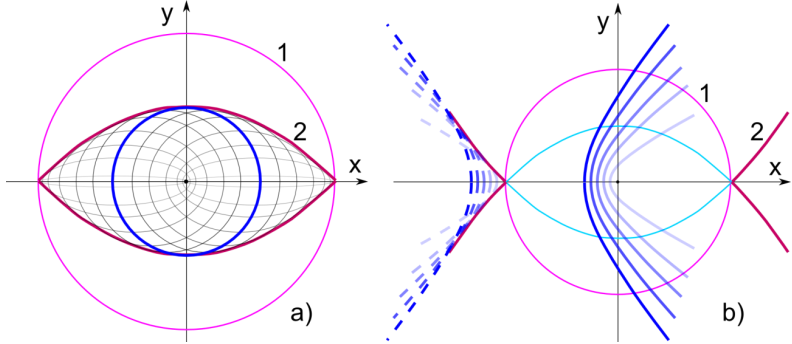


Рис. 3. Семейства возможных орбит одной энергии. Вектор Лапласа направлен вдоль оси  $x$ . 1 — граница большого круга, 2 — огибающие параболы: а) случай  $E < 0$  — область «глаз»; б) случай  $E > 0$  (показаны только орбиты с  $L > 0$ ) — две области «рыбий хвост». Пунктиром показаны орбиты «отталкивающегося» спутника

Построим орбиты при заданной энергии спутника и с общим направлением вектора Лапласа (вдоль оси абсцисс). Локализованные орбиты при отрицательных энергиях заполняют область типа «глаз». Открытые орбиты «отталкивающегося» спутника — две симметричные области типа «рыбий хвост» (рис. 3). Почему в обоих случаях огибающими кривыми выступает пара парабол, мы выясним позже.

Параметры орбиты  $p$  и  $\varepsilon$  связаны с физическими величинами:

$$p = \frac{M^2}{\mu}, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2E \frac{M^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\mu}}. \quad (10)$$

Изменение фокального параметра  $p$  приводит только к однородному изменению масштаба изображения кривой (при  $p > 0$ ). Рост эксцентриситета  $\varepsilon$  сопровождается последовательным изменением формы кривой:  $\varepsilon = 0$  — окружность,  $0 < \varepsilon < 1$  — эллипсы,  $\varepsilon = 1$  — парабола,  $1 < \varepsilon$  — гиперболы (рис. 4).

## Коническая поверхность

В 3-мерном пространстве спутник движется по плоской орбите. Это позволяет нам мысленно представить математическую конструкцию, когда в ортогональном направлении  $z$  будут откладываться значения

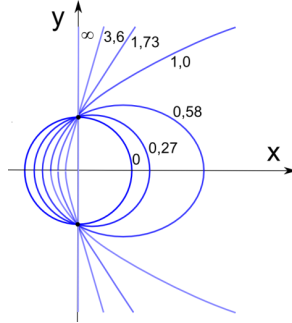


Рис. 4. Орбиты с постоянным фокальным параметром  $p$ . Цифрами указаны значения  $\varepsilon$

функций, определенных на плоскости движения  $(x, y)$ . По сути, для построения графика функции, определенной на плоскости орбиты (размерность 2), мы вводим дополнительное измерение (размерность 1), чтобы вдоль него откладывать значения функции. Благодаря тому, что в сумме размерность графика  $2 + 1 = 3$  равна размерности привычного для нас трехмерного пространства, мы можем наглядно представить себе эту конструкцию. Но при этом будем помнить, что природа дополненного направления  $z$  виртуальна.

Вектор Лапласа (5) представим в таком виде, чтобы единичный вектор  $\hat{r}$  в правой части стоял без коэффициентов

$$\varepsilon = \hat{r} - \frac{v \times M}{\mu}. \quad (11)$$

Именно это слагаемое привлекает наше внимание в поисках гравитационного конуса. В самом деле, если коническую поверхность с образующей под углом в 45 градусов к вертикальной оси представить как график функции двух переменных

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (12)$$

то на плоскости  $(x, y)$  градиент этой функции как раз равен единичному вектору, направленному вдоль радиус-вектора

$$\nabla f(x, y) = \hat{r}. \quad (13)$$

Перепишем уравнение (11) в виде:

$$\hat{r} = \varepsilon + \frac{v \times M}{\mu}. \quad (14)$$

Умножим левую и правую части уравнения скалярно на  $\mathbf{r}$ .

$$r = r\varepsilon \cos \varphi + p, \quad (15)$$

где  $r, \varepsilon$  — модули векторов  $\mathbf{r}, \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $p = M^2/\mu$ .

Уравнение (15) эквивалентно уравнению орбиты (2), поэтому и обозначения в них одни и те же. Видно, что модуль вектора Лапласа равен эксцентриситету.

Нормаль к плоскости движения параллельна вектору момента скорости. Выберем систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль момента скорости  $\mathbf{M}$  (4), а ось  $x$  вдоль вектора Лапласа  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (11). Ось  $y$  достраивается до правой тройки ортогональных направлений.

В качестве функций для построения графиков в направлении  $z$  рассмотрим левую и правую части уравнения (15). Левая часть — функция, чей график представляет собой коническую поверхность (см. (12)):

$$r = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (16)$$

Правая часть уравнения (15) — это уравнение плоскости:

$$z = g(x, y) = \varepsilon x + p. \quad (17)$$

Эта плоскость пересекает ось  $z$  в точке  $z = p$ . Тангенс наклона плоскости сечения (17) к плоскости реального движения спутника  $(x, y)$ , т. е. градиент функции  $g(x, y)$ , равен эксцентриситету  $\varepsilon$ .

Коническая поверхность (16) и плоскость (17) пересекаются. Проекция этого пересечения на плоскость движения  $(x, y)$  представляет собой решение уравнения (15), т. е. является орбитой (рис. 5).

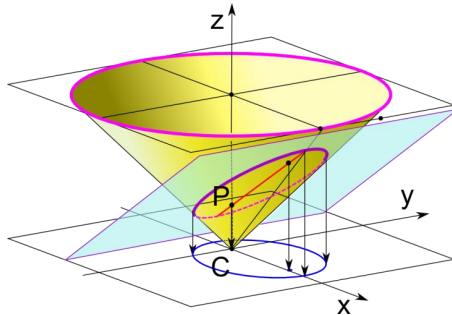


Рис. 5. Орбита как проекция сечения конуса



Заметим, что решением (орбитой) является не само сечение конуса, а его проекция на плоскость движения. Выше мы уже обращали внимание на виртуальную, вспомогательную роль направления  $z$ . С математической точки зрения здесь используется замечательный факт, что характер конических сечений при плоскопараллельном проецировании не меняется: эллипс переходит в эллипс, парабола — в параболу, гипербола — в гиперболу (естественно, с измененными параметрами).

В трехмерной задаче в зависимости от начальных условий спутник вокруг центра может совершать движение в произвольной плоскости, и всякий раз мы можем к орбите мысленно добавить геометрическую конструкцию гравитационного конуса. Орбиты подвижного спутника мы получаем решением статической геометрической задачи на построение. Это возможно благодаря уникальному свойству гравитационного (кулоновского) потенциала, который дает для отрицательных энергий стационарные (повторяющиеся) орбиты — спутник совершает строго периодическое движение: проходит раз за разом одни и те же положения в пространстве с одними и теми же скоростями (в случае  $E < 0$ ). Уникальность этого свойства прекрасно иллюстрируют изображения реальных траекторий искусственных спутников Земли [5, с. 42], когда даже малейшее отклонение силы от обратной квадратичной зависимости от расстояния приводит к полному «перепутыванию» траектории с течением времени.

Таким образом, гравитационный конус — это геометрический образ не столько самого притягивающего центра, сколько конкретного решения уравнения движения (1) — орбиты спутника в поле центра. Для разных направлений вектора момента скорости  $\mathbf{M}$  соответствующие конусы тоже будут направлены по-разному. Конус — это атрибут орбиты, мысленная конструкция, наглядно представляющая связи между различными параметрами этой механической системы — математического спутника.

## Линия вторых фокусов

Рассмотрим общую задачу построения орбит спутника с помощью конуса (рис. 6). Далее все расчеты делаем в расширенном 3d-пространстве. В начальной точке на орбите  $S = (q, 0, 0)$  выберем направление начальной скорости под углом  $\alpha$  к оси  $x$

$$\mathbf{v}_0 = v(\cos \alpha, \sin \alpha, 0). \quad (18)$$

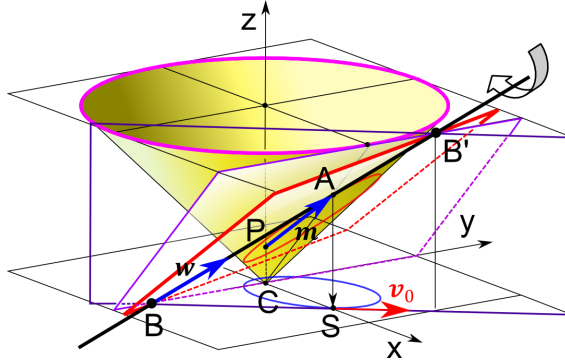


Рис. 6. Сечение конуса пучком плоскостей. Ось пучка  $BB'$  проецируется в направлении скорости  $v_0$

Увеличивая модуль скорости  $v$  от нуля до бесконечности, построим все возможные орбиты. В качестве безразмерного параметра, пробегающего значения от 0 до  $\infty$ , будем использовать отношение  $\zeta = \frac{p}{q}$ , где  $q$  — начальное расстояние спутника от центра,  $p$  — фокальный параметр (9), равный в данном случае:

$$p = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \alpha}{\mu}. \quad (19)$$

Точке  $S$  на горизонтальной плоскости поставим в соответствие точку  $A$  на поверхности конуса. Направлению скорости — прямую  $BB'$  через  $A$  с направляющим вектором  $\mathbf{w}$  в касательной плоскости к поверхности конуса. Эта прямая будет в плоскости сечения для данного направления  $v_0$  при любом значении  $\zeta$ . Поэтому прямая  $BB'$  — это ось пучка всех возможных плоскостей сечения.

Точка на поверхности конуса

$$A = (q, 0, q) = q(1, 0, 1). \quad (20)$$

Точка пересечения плоскостью сечения оси  $z$ :

$$P = (0, 0, p). \quad (21)$$

Направляющий вектор прямой  $BB'$

$$\mathbf{w} = (c, s, c), \quad (22)$$

где

$$c = \cos \alpha, s = \sin \alpha.$$

Вектор, который определяет, какая из плоскостей пучка становится плоскостью сечения

$$PA = \mathbf{m} = (q, 0, q - p) = q(1, 0, 1 - \zeta), \quad (23)$$

где

$$\zeta = \frac{p}{q}.$$

Найдем направление нормали к плоскости сечения:

$$\mathbf{n} = \mathbf{m} \times \mathbf{w} = q \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 - \zeta \\ c & s & c \end{pmatrix} = qs(-(1 - \zeta), -\eta\zeta, 1), \quad (24)$$

где  $i, j, k$  — орты осей  $x, y, z$ ,

$$\eta = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Уравнение плоскости сечения имеет вид:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - (A, \mathbf{n}) = 0 \quad (25)$$

или

$$z = p + (1 - \zeta)x + \zeta\eta y. \quad (26)$$

Таким образом, вектор Лапласа равен:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1 - \zeta, \zeta\eta, 0). \quad (27)$$

Вычислим размер большого круга  $R$ . Поскольку

$$v^2 = \frac{p\mu}{q^2s^2}, \quad (28)$$

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{p\mu}{2q^2s^2} - \frac{\mu}{q} = \frac{\mu}{q} \left( \frac{\zeta}{2s^2} - 1 \right),$$

то

$$R = 2a = \frac{\mu}{|E|} = \frac{q}{\left| 1 - \frac{\zeta}{2s^2} \right|}.$$

Второй фокус орбиты находится в точке  $F$ . Покажем, что вектор  $SF$  всегда повернут на удвоенный угол  $2\alpha$ .

$$CF = R\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{q\zeta}{2s^2 - \zeta} \left( \frac{1 - \zeta}{\zeta} 2s^2, \sin 2\alpha, 0 \right), \quad (29)$$

$$SF = CF - CS = \frac{q\zeta}{2s^2 - \zeta} (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, 0). \quad (30)$$

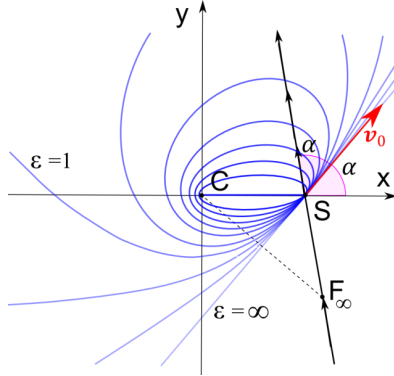


Рис. 7. Орбиты спутника с заданным направлением скорости

По положению фокусов (один в точке  $C$ , второй в  $F$ ) и значению большой оси  $R$  однозначно строятся конические сечения (рис. 7).

Проследим эволюцию орбит с ростом параметра  $\zeta$ . Геометрически этому соответствует поворот плоскости сечения, когда точка  $P$  будет подниматься из точки  $C$  неограниченно высоко.

При нулевом значении начальной скорости ( $P = C$ ) мы просто отпускаем спутник в точке  $S$ . Спутник начинает падать вдоль радиус-вектора на притягивающий центр  $C$ . Плоскостью сечения является касательная плоскость к конусу ( $\varepsilon = 1$ ). Орбита — двойной отрезок.

С ростом начальной скорости вектор  $\varepsilon$  поворачивается и уменьшается по модулю. Орбиты — эллипсы. Пройдя минимум,  $\varepsilon(\zeta)$  вновь начинает расти.

При  $\zeta = 2s^2$  второй фокус  $F$  улетает на бесконечность вверх влево. Значение  $\varepsilon$  вновь равно 1. Это парабола. Плоскость сечения параллельна образующей конуса. С этого момента орбиты становятся открытыми.

Дальнейший рост  $\zeta$  приводит к возвращению фокуса  $F$  снизу справа по той же линии вторых фокусов. Поскольку теперь угол наклона плоскости сечения больше угла образующей конуса (к горизонту), сечением становятся гиперболы. Вторые ветви гиперболы (на рисунке не показаны), которые соответствуют орбитам «отталкивающегося» спутника, получаются при сечении конуса, продолженного в полупространство отрицательных значений  $z$ .

Предельное положение второго фокуса  $F(\infty)$  находится на расстоянии  $q$  от начальной точки  $S$  ( $F_\infty S = CS$ ). Плоскость сечения при этом

вертикальна. Две ветви гиперболы схлопываются в одну прямую линию. Спутник летит с бесконечной скоростью и полностью игнорирует притягивающий центр. Это равносильно ситуации, когда скорость спутника остается конечной, но мы выключаем притяжение центра. Траектория при этом имеет один и тот же вид, хотя время прохождения любого фиксированного участка, конечно, зависит от скорости.

Рассмотрим частный случай, когда начальная скорость перпендикулярна радиус-вектору ( $\alpha = 90^\circ$ ). Тогда линия вторых фокусов совпадает с осью  $x$ . С ростом скорости второй фокус из начальной точки  $S$  удаляется влево по закону:

$$SF = \frac{q\zeta}{2-\zeta}. \quad (31)$$

При этом начальная точка  $S$  становится экстремальной точкой орбиты: до момента, когда скорость достигнет значения круговой для данного расстояния до центра, это будет апоцентр, при больших начальных скоростях — перицентр. Начальное расстояние  $CS$  будем обозначать  $\delta$ .

Орбиты с фиксированным значением  $\delta$  показаны на рис. 8. Семейство орбит получено поворотом секущей плоскости с шагом в 15 градусов. Ось вращения плоскости  $BB'$  (см. рис. 6) в этом случае параллельна оси  $y$ . Орбиты с тем же направлением начальной скорости (перпендикулярно оси  $x$ ), но с фиксированным фокальным параметром  $p$  уже демонстрировались выше на рис. 4.

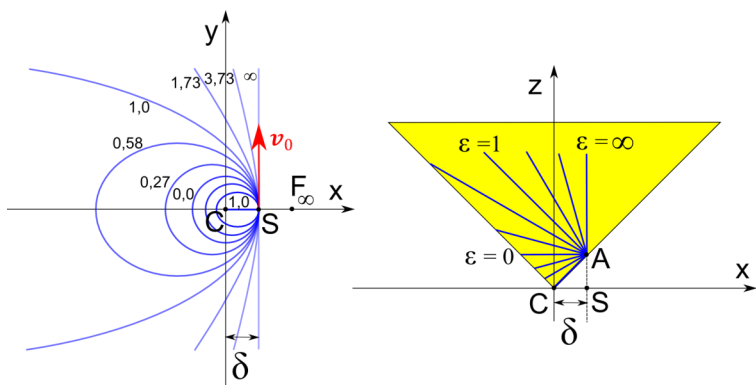


Рис. 8. Орбиты спутника с постоянным параметром  $\delta$  и соответствующие сечения конуса



В силу сохранения полной энергии (3) положение спутника при заданном значении  $R$  однозначно задает модуль его скорости. В приведенном способе построения использовалось то, что в точке  $Q$  (см. рис. 9) любого эллипса скорость равна круговой при той же энергии (размеру большой оси).

Окружности защиты в графических редакторах как примитивы (заготовки). Примитивов для гипербол в обычных редакторах нет. Но их несложно сделать. Как и в случае эллипсов, форма и размер гиперболы задаются двумя параметрами, т. е. любую гиперболу можно перевести в любую другую двумя манипуляциями: однородным изменением масштаба и сжатием вдоль одной из осей симметрии (это при условии, что гиперболы одинаково ориентированы). Поэтому для практических нужд достаточно иметь один образец гиперболы, например, равнобочную (асимптоты ортогональны).

Построить график гиперболы можно, например, в приложении Excel. Задаем формулы: для кривой  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  в диапазоне от 1 до 2,5 и для асимптоты  $y = x$  в диапазоне от 0 до 2,5. Это заготовка (четвертинка) примитива гиперболы. После дублирования с отражением по вертикали и по горизонтали получаем готовый примитив.

Как с его помощью построить гиперболу с заданными значениями  $R$  и  $CF_{\Gamma\Pi}$  показано на рис. 10. Вначале сжатием по горизонтали подгоняем зазор между вершинами примитива к  $R$ , а потом вертикальным

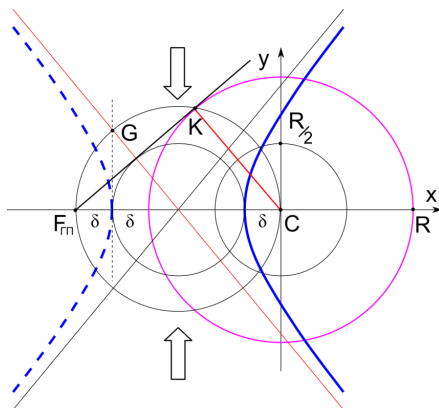


Рис. 10. Построение гиперболы в графическом редакторе с помощью приготовленного примитива

сжатием добиваемся правильного угла асимптот. Этот угол находим пересечением вертикали (пунктир) из края малой окружности диаметром  $R$  с окружностью диаметром, равным  $CF_{\Gamma\P}$  (точка  $G$ ). Под этим же углом ориентирован перпендикуляр  $CK$  к касательной  $F_{\Gamma\P}K$ , которая проведена из второго фокуса  $F_{\Gamma\P}$  к большому кругу.

Поскольку для гиперболы  $\varepsilon > 1$ , второй фокус  $F$  находится за пределами большого круга, но, как и у эллипса, на расстоянии  $2\delta$  до границы большого круга ( $CF = R + 2\delta$ ).

Строить неограниченную кривую с помощью примитивов допустимо для большинства задач. Для особых случаев всегда можно построить примитив с расширенным диапазоном.

Для построения параболы такой проблемы вообще нет, поскольку это кривая с одним параметром. Любую параболу можно перевести в другую параболу однородным изменением масштаба. У параболы только один фокус, поэтому характерным размером параболы служит расстояние до директрисы  $CD$  (рис. 11).

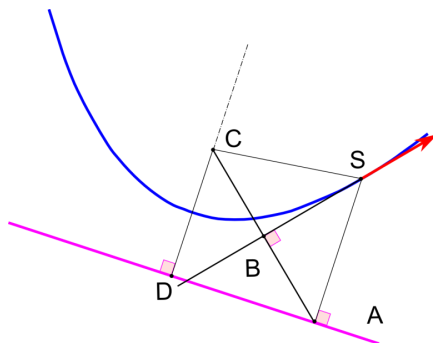


Рис. 11. Построение параболы в графическом редакторе с помощью подготовленного примитива

Если через заданную точку спутник летит по параболе в заданном направлении, орбиту строим, используя оптическое свойство параболы: радиус-вектор из фокуса  $CS$  зеркально отражается от линии направления скорости  $BS$  в направлении оси параболы  $AS$ . Из равенства треугольников  $CSB$  и  $BSA$  находим точку на директрисе  $A$ . Директриса ортогональна направлению оси параболы  $AS$ . В результате находим расстояние от фокуса до директрисы  $CD$ . Ориентируем примитив параболы вдоль оси  $CD$  и изменением масштаба добиваемся результата.



Таким образом, по заданным параметрам мы можем построить любые орбиты спутника.

Все рисунки в этой статье нарисованы по изложенной выше методике в бесплатном векторном редакторе Inkscape.

## Параболоид постоянной энергии

Особый интерес представляет семейство орбит одной энергии. Пусть  $E < 0$ , вектор Лапласа  $\epsilon$  направлен вдоль оси  $x$ . На боковой ортогональной проекции  $xz$  конус изображен прямоугольным треугольником с вершиной в начале координат, сечение — отрезком  $AB$  (рис. 12).

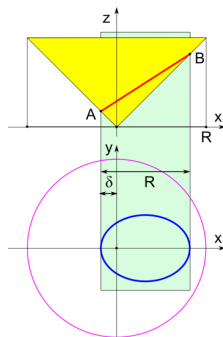


Рис. 12. Ортогональные проекции конуса и эллиптического сечения

Проекция отрезка  $AB$  на ось  $x$  должна всегда быть равна  $R$ . Если в качестве параметра использовать расстояние перицентра  $\delta$ , то уравнение семейства прямых линий, пересекающих конус с таким условием, имеет вид:

$$z(\delta) = \frac{2\delta(R-\delta)}{R} + \frac{R-2\delta}{R}x. \quad (32)$$

Семейство прямых (32) имеет огибающую в виде параболы (рис. 13):

$$z_{\text{ЭЛ}} = \frac{R^2 + x^2}{2R}. \quad (33)$$

Огибающая выступает в роли ограничителя: для того чтобы построить сечение постоянной энергии, достаточно провести прямую, касающуюся параболы (33). Для произвольных направлений вектора Лапласа в горизонтальной плоскости таким ограничителем становится параболоид вращения (рис. 14). Необходимые сечения получаются, если плоскость сечения касается параболоида.

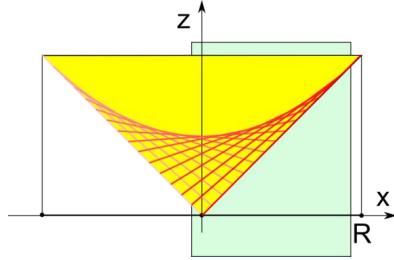


Рис. 13. Семейство сечений постоянной проекции

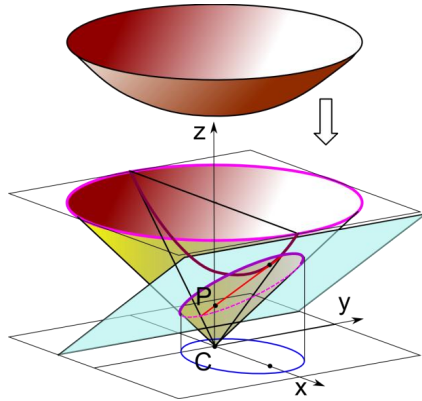


Рис. 14. Параболоид вращения касается конической поверхности по границе большого круга

Для орбит с энергией  $E > 0$  справедливы аналогичные рассуждения. В этом случае ограничителем служит параболоид в нижней части конуса.

$$z_{\Gamma\Pi} = -\frac{R^2 + x^2}{2R}. \quad (34)$$

Касание плоскости сечения с параболоидом происходит вне большого круга (рис. 15).

Вернемся к рассмотрению орбит, у которых вектор Лапласа  $\epsilon$  направлен вдоль оси  $x$ .

Примечательно, что параболы (33), (34) касаются линии сечения (32) в точке, которая проецируется во второй фокус. Соответствующие размеры расстояний между фокусами равны:

$$\begin{aligned} CF_{3Л} &= R - 2\delta \quad (E < 0), \\ CF_{\Gamma\Pi} &= R + 2\delta \quad (E > 0), \end{aligned} \quad (35)$$



Если совместить оси обеих проекций, то орбиты пройдут через точку  $P$ , а если горизонтальную проекцию эллипса поднять, а гиперболы — опустить на  $R$ , то орбиты будут касаться соответствующих парабол. Кроме того, в этих точках касательные к орбитам совпадают с линиями сечения.

Таким образом параболы (33) и (34) являются также огибающими для семейства орбит: внутри большого круга касаются эллипсы, вне его — ветви гиперболы для «отталкивающегося» спутника (см. рис. 17). Что и было показано ранее на рис. 3.

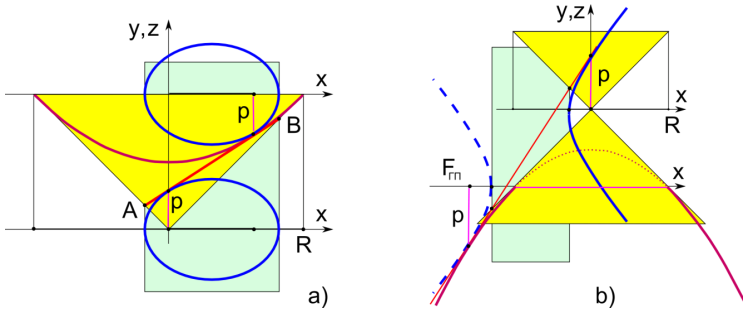


Рис. 17. Совмещение ортогональных проекций

## Проекционные свойства параболы и параболоида

Стереометрическую задачу касания плоскости с параболоидом с последующим проецированием сечения в горизонтальную плоскость можно свести к простым правилам построений на плоскости. Для этого докажем некоторые свойства проецирования.

**Теорема 1.** Дана парабола  $z = x^2$  и точка  $A = (x_0, z_0)$ , причем  $z_0 < x_0^2$ . Из точки  $A$  к параболе проведены 2 касательные, которые касаются в точках  $B = (x_1, z_1)$  и  $C = (x_2, z_2)$ , причем  $x_1 < x_0 < x_2$ . Справедливо равенство:  $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$ , т. е. проекции на ось  $x$  точек касания расположены симметрично относительно проекции точки  $A$  (рис. 18).

**Доказательство.** Касательные к параболе в точках  $B = (x_1, z_1)$  и  $C = (x_2, z_2)$  имеют уравнения:

$$\begin{aligned} z_{1K} &= 2x_1x - x_1^2, \\ z_{2K} &= 2x_2x - x_2^2. \end{aligned} \quad (36)$$

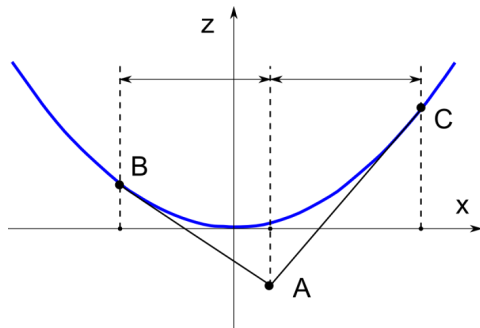


Рис. 18. Свойство проекций параболы

В точке пересечения справедливо:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ z_0 &= x_1 x_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Из системы (37) следует:

$$x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = x_0^2 - z_0. \quad (38)$$

В силу единственности построения касательных из точки, верно и обратное утверждение: если из точки проведены касательные, то справедливо (38). Ч. т. д.

**Теорема 2.** Дан параболоид  $z = x^2 + y^2$  и прямая  $l$ , расположенная ниже параболоида. Через прямую  $l$  проведены две касательные плоскости к параболоиду с точками касания  $B = (x_1, y_1, z_1)$  и  $C = (x_2, y_2, z_2)$ . Утверждается, что проекции точек касания точки  $B' = (x_1, y_1, 0)$  и  $C' = (x_2, y_2, 0)$  расположены симметрично относительно проекции прямой  $l$  (рис. 19).

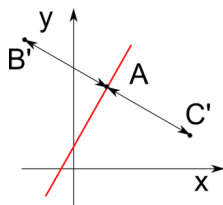


Рис. 19. К теореме 2

**Доказательство.** Это обобщение предыдущей теоремы.

Плоскости касания в точках  $B$  и  $C$  имеют уравнения:

$$\begin{aligned} z_{1K} &= 2x_1x + 2y_1y - x_1^2 - y_1^2, \\ z_{2K} &= 2x_2x + 2y_2y - x_2^2 - y_2^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Приравнивая значения координат  $z$ , получаем уравнение для проекции линии пересечения  $l$  на горизонтальную плоскость:

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2. \quad (40)$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку

$$A = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, 0 \right). \quad (41)$$

в направлении, перпендикулярном отрезку  $B'C'$ , поскольку левую часть (40) можно рассматривать как скалярное произведение  $(\mathbf{r}, B'C')$ . В силу единственности построения касательных плоскостей через заданную прямую справедливо обратное утверждение: если дана прямая, то проекции точек касания  $B'$  и  $C'$  расположены симметрично относительно проекции этой прямой. Ч. т. д.

**Теорема 3.** Дан параболоид  $z = x^2 + y^2$  и точка ниже его

$$A = (x_0, y_0, z_0), \quad z_0 < x_0^2 + y_0^2.$$

Утверждается, что ГМТ проекций всех точек касания параболоида плоскостями, проходящими через точку  $A$ , — это окружность вокруг точки  $A' = (x_0, y_0, 0)$  с радиусом  $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}$  (рис. 20).

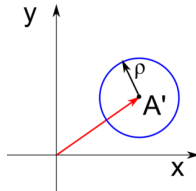


Рис. 20. К теореме 3

**Доказательство.** Возьмем произвольную точку на окружности вокруг точки  $A' = (x_0, y_0, 0)$  с радиусом  $\rho$

$$B = (x_0 + c, y_0 + s, 0), \quad (42)$$

где  $c = \rho \cos \alpha$ ,  $s = \rho \sin \alpha$ .

Значение  $z$  в точке  $A' = (x_0, y_0, 0)$  плоскости, которая касается параболоида в точке  $B$ , равно:

$$z_{BK} = 2(x_0 + c)x_0 + 2(y_0 + s)y_0 - (x_0 + c)^2 - (y_0 + s)^2 = r^2 - \rho^2, \quad (43)$$

где

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2. \quad (44)$$

Видно, что выражение (43) не зависит от угла. Значит все касательные плоскости, точки касания которых проецируются на окружность, пересекаются в одной точке  $A$ .

Точка пересечения находится на  $\rho^2$  ниже параболоида. Ч. т. д.

## Правила построений на плоскости орбиты

**ПРАВИЛО ОТРАЖЕНИЯ 1.** Если спутник с отрицательной полной энергией  $E$  (с большим кругом радиуса  $R = -\frac{\mu}{E}$ ) в точке  $S$  движется в направлении  $\mathbf{v}$ , то второй фокус эллипса  $F_{\text{эл}}$  строится отражением точки  $D$  относительно прямой  $\mathbf{v}$  (рис. 21,  $a$ ).

Это правило следует из теоремы 2. Точка  $D$  — проекция первой точки касания,  $F_{\text{эл}}$  — вторая, линия  $\mathbf{v}$  — проекция оси пучка всех возможных плоскостей сечения (см. рис. 19). Из равенства треугольников следует правило линии вторых фокусов, которое ранее было получено аналитически (30).

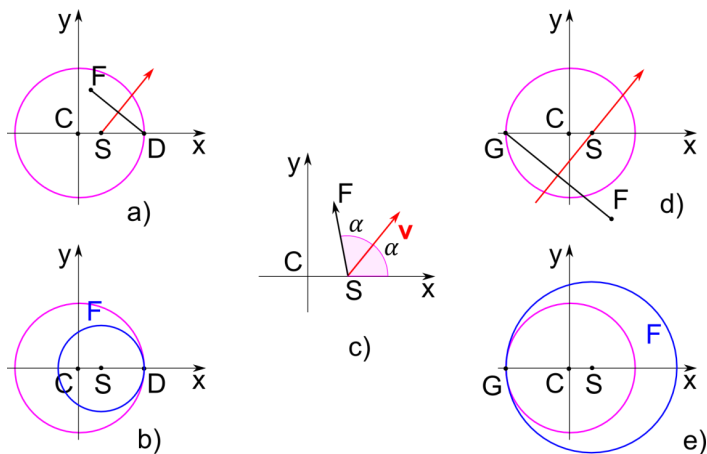


Рис. 21. Правила построения орбит

**ПРАВИЛО ОКРУЖНОСТИ 1.** Все возможные положения вторых фокусов орбиты спутника с отрицательной полной энергией, находящегося в точке  $S$ , расположены на окружности радиуса  $\rho = SD$  (рис. 21,  $b$ ).

**ПРАВИЛО ДВОЙНОГО УГЛА.** Вторые фокусы располагаются на линии с направляющим вектором, повернутым относительно радиус-вектора на угол в 2 раза больше, чем направление скорости (рис. 21,  $c$ ).

Для спутника с положительной полной энергией правила следующие.

**ПРАВИЛО ОТРАЖЕНИЯ 2.** Если спутник с положительной полной энергией  $E$  (с большим кругом радиуса  $R = \frac{\mu}{E}$ ) в точке  $S$  движется в направлении  $\mathbf{v}$ , то второй фокус гиперболы  $F_{\Gamma\Pi}$  строится отражением  $G$  относительно прямой  $\mathbf{v}$  (рис. 21,  $d$ ).

**ПРАВИЛО ОКРУЖНОСТИ 2.** Все возможные положения вторых фокусов орбиты спутника с положительной полной энергией, находящегося в точке  $S$ , расположены на окружности радиуса  $\rho = SG$  (рис. 21,  $e$ ).

### Двойной циферблат: радиус-вектор и приведенный годограф

Скорости спутника на орбите находим с помощью годографа — ГМТ концов всех векторов скорости спутника на орбите, отложенных из начала координат [6, с. 21; 7, с. 18]. Для задачи Кеплера (математического спутника) все точки годографа расположены на окружности. Эллиптическим орбитам соответствует годограф в виде целой окружности, параболическим — окружности с выколотой одной точкой, гиперболическим — окружности без одной замкнутой дуги (рис. 22).

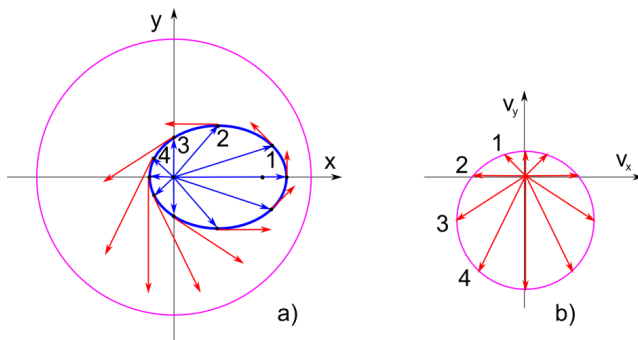


Рис. 22. а) орбита спутника; б) годограф скорости спутника



Радиус годографа равен:

$$w = \frac{\mu}{M} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \quad (45)$$

где  $M$  — момент скорости,  $p$  — фокальный параметр.

Центр окружности годографа смещен из центра на величину:

$$u = \varepsilon w. \quad (46)$$

Для нахождения скоростей спутника методом построения введем понятие *приведенного годографа*. Приведенный годограф — это годограф, повернутый на 90 градусов и приведенный к размеру большого круга. В результате совмещения приведенного годографа с большим кругом получается конструкция *двойного циферблата*: из начала координат откладывается стрелка радиус-вектора, а из второго фокуса — стрелка повернутой на 90 градусов скорости (рис. 23).

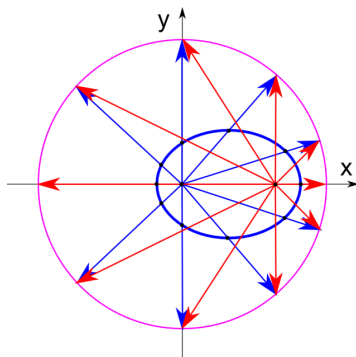


Рис. 23. Двойной циферблат: совмещение повернутого годографа с большим кругом

Из правил, изложенных выше, следует метод построения орбиты и скоростей спутника в каждой ее точке (рис. 24). Проводим радиус-вектор до границы большого круга  $D$  (для гипербол в обратном направлении). В эту же точку из второго фокуса проводим вектор повернутой скорости. Поворачиваем его на 90 градусов относительно середины вектора. Получаем вектор скорости в точке орбиты  $S$ , расположенной на пересечении радиус-вектора с линией, порожденной вектором скорости.

Масштаб изображения скорости: длине вектора скорости  $R$  соответствует скорость  $w$ . Поскольку радиус большого круга  $R$  зависит только

от полной энергии, а радиус годографа  $w$  — только от момента скорости, то для каждой орбиты он будет свой.

Такой *метод креста* (пересечение векторов повернутой и обычной скорости) применим для построения эллипсов и гипербол. Для параболы нет большого круга ( $R = \infty$ ). Как уже упоминалось, в силу того, что это кривая с одним параметром, ее легко построить по направлению скорости в заданной точке (см. рис. 11). А для определения абсолютных величин скоростей в точках параболы можно использовать повернутый годограф в произвольном масштабе (см. рис. 25).

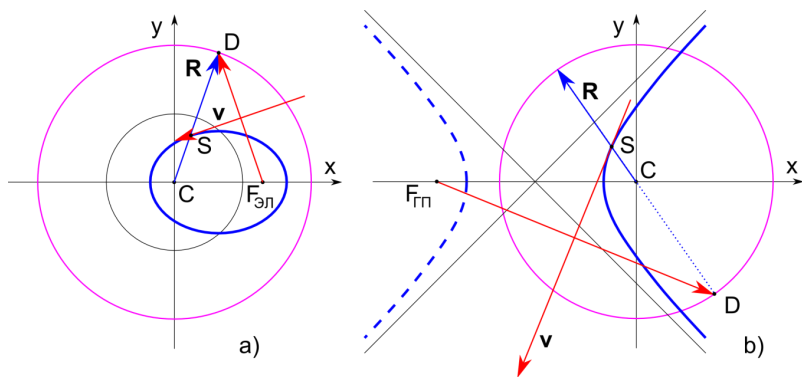


Рис. 24. Построение точек орбиты и вектора скорости спутника: а) для эллиптических орбит; б) для гиперболических орбит

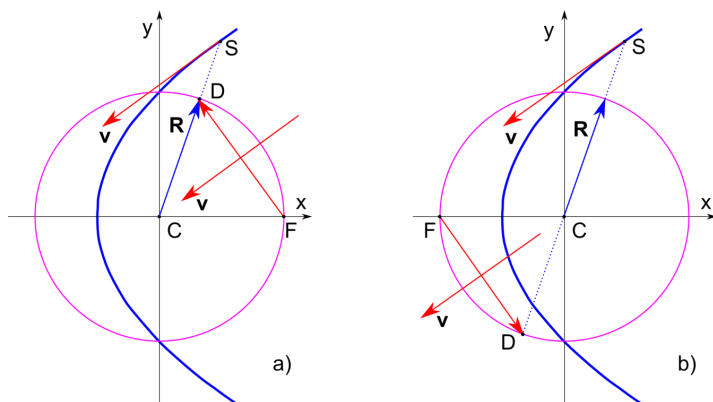


Рис. 25. Построение векторов скорости спутника параболической орбиты: а) по типу эллипса; б) по типу гиперболы

## Космическое оригами

Метод креста для построения эллипса и гиперболы переводится на язык оригами — искусства сгибания бумаги. Для построения эллипса возьмем круг радиуса  $R$  и наметим точку  $F_{\text{эл}}$  на расстоянии  $\varepsilon R$  от центра круга. Если сгибать круг таким образом, чтобы совмещались точки его края с намеченной точкой  $F_{\text{эл}}$ , то в результате многочисленных сгибов останется область без сгибов в форме эллипса с эксцентриситетом  $\varepsilon$  и большой осью  $R$  (рис. 26, а).

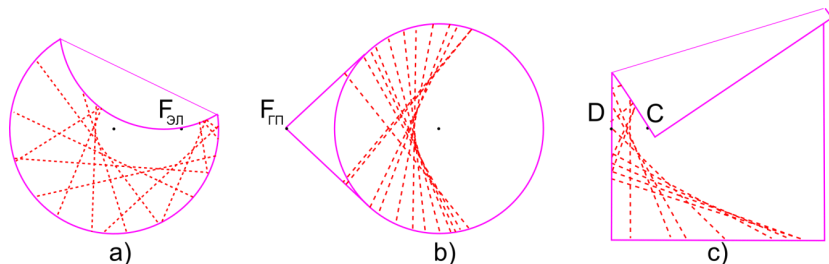


Рис. 26. Построение сгибанием бумаги: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы

Такой способ построения эллипса упоминается в книге Гарднера [8, с. 222]. Но способ обобщается и на гиперболы. Для этого вырежем фигуру, показанную на рис. 26, б. Поскольку  $\varepsilon > 1$ , точка  $F_{\text{гп}}$ , удаленная от центра круга на  $\varepsilon R$ , теперь оказывается за пределами круга. Совмещая точки внешнего края круга с  $F_{\text{гп}}$  и делая многочисленные сгибы, получаем «чистую» область, ограниченную гиперболой с соответствующими параметрами.

Для полноты картины приведем способ построения параболы (рис. 26, в). Возьмем лист бумаги с прямым краем. Этот край будет директрисой. Наметим фокус параболы  $C$  на расстоянии  $CD$  от края. Совмещая все точки края с фокусом  $C$  и делая сгибы, получаем область, ограниченную параболой с параметром  $CD$ .

Надо ли говорить, что все линии сгибов — это касательные к орбитам, т. е. направления скорости в данной точке.

## Примеры задач

Приведем примеры задач, которые решаются с помощью представлений о гравитационном конусе.

**Космический бильярд.** В пространстве вокруг центра притяжения  $C$  расположены неподвижные отражающие экраны  $M_i$ . Спутник  $S$  летает вокруг центра  $C$ , абсолютно упруго соударяясь с экранами. Задачей может быть поиск циклических орбит при данной конфигурации расположения экранов (см. рис. 27, а).

Задача распадается на поиск фрагментов свободного движения спутника между соударениями. Может служить простейшей моделью соударения космических объектов.

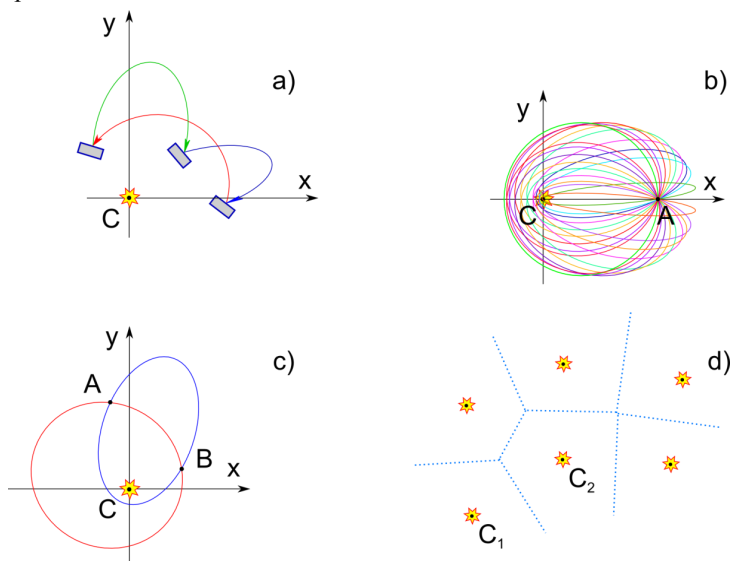


Рис. 27. Задачи: а) космический бильярд; б) фейерверк на орбите; в) перелет; д) звездные соты

**Фейерверк на орбите.** В точке  $A$  возле центра притяжения  $C$  происходит взрыв пиротехнического заряда так, что во все направления летят светящиеся частицы с одной начальной скоростью. Нужно построить форму фейерверка в зависимости от начальных условий (см. рис. 27, б).

Задача выявляет зону доступности для спутника из данной точки с данной энергией [9, с. 2].

**Перелет.** Спутнику необходимо из точки  $A$  попасть в точку  $B$ . Определить необходимые начальные условия (см. рис. 27, в).

**Звездные соты.** В пространстве дана система притягивающих центров  $C_i$  таких, что действие их притяжения ограничено ячейками в виде

многогранников. Соседние многогранники имеют общую границу в виде плоскости, ортогональной линии между соседними центрами  $C_1C_2$ . Плоскость пересекает  $C_1C_2$  в точке равенства сил притяжения центров. Требуется построить орбиты движения спутника сквозь эти соты (см. рис. 27, *d*).

Примечательно, что спутник при прохождении границы будет испытывать скачки момента скорости.

## Инструмент для обучения

Геометрическая конструкция «гравитационный конус» представляет собой визуализацию соотношений, вытекающих из постоянства вектора Лапласа (5). Конструкция существует в виртуальном трехмерном пространстве (см. рис. 28). К плоскости ( $xy$ ) орбиты спутника в реальном пространстве добавилось воображаемое ортогональное направление  $z$ . Конструкция состоит из конической поверхности, плоскости сечения, параболоида-ограничителя, двойного циферблата. Этот набор переводит все физические величины, связанные с задачей Кеплера (математического спутника), в соответствующие линейные размеры отрезков. В результате задача сводится к геометрическим построениям.

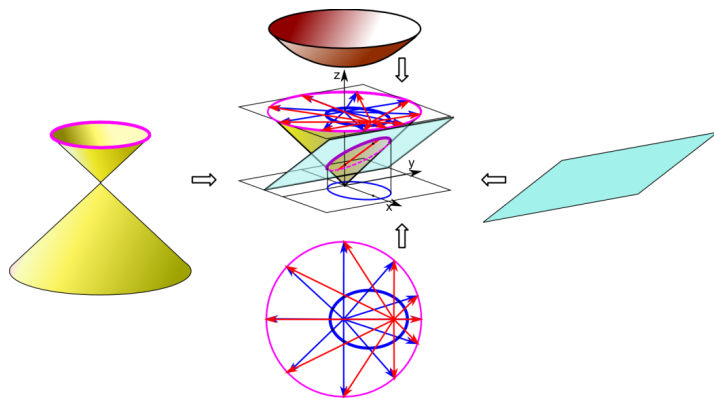


Рис. 28. Конструкция «гравитационный конус»

Идея конуса в задаче Кеплера, как оказалось, высказывалась и ранее независимо разными авторами [10, с. 70; 11]. И даже классики в лице Лагранжа не пропустили эту математическую особенность, на что указывает один из популяризаторов идеи конуса А. Б. Гивенталь [14]. В дан-

ном случае конус привлекается для разгадки «тайны второго фокуса» и разработки методики практических построений. В совокупности с идеей присоединенного годографа конструкция гравитационного конуса становится эффективным инструментом в обучении основам небесной механики. Занятия со школьниками средних и старших классов, проведенные автором в летнем математическом лагере «Алеф» (август 2016 г. [15]), подтвердили доступность для детей материала, традиционно изучаемого в рамках классической механики в ВУЗах. Знание законов движения небесных тел не должно сдерживаться ограниченностью школьной математики [16]. Смеем надеяться, что это послужит дополнительным аргументом в пользу возвращения предмета «Астрономия» в общеобразовательные школы.

Методика работы с гравитационным конусом может быть представлена в следующем виде. Условия задачи переформулируются в терминах объемной конструкции гравитационного конуса, т. е. устанавливается, как необходимо повернуть плоскость сечения конуса. Но стереометрическая задача сама по себе не решается, а с помощью простых правил сводится к построениям на плоскости орбиты. Двойной циферблат устанавливает численные соотношения между параметрами орбиты.

Возвращение в образование геометрических задач на построение должно опираться на современные средства отображения и графические редакторы. Ясное понимание учеником цели своих действий позволит ему не привязываться к конкретной компьютерной программе, а решать задачи с помощью любых доступных носителей: будь то традиционный чертеж, дисплей планшета, либо любая бумага для оригами. Универсальность подхода обеспечит закрепление сущности математических закономерностей.

Все изложенное выше позволяет нам ответить на сформулированный в самом начале вопрос, — что же находится во втором фокусе орбит небесных тел? Приведенный годограф выявляет неразрывную связь между собой двух фокусов конических сечений (рис. 29).

Вместе с большой окружностью оба фокуса задают алгоритм построения точек орбиты — образуют двойной циферблат. У фокусов разные роли. Радиус-вектор до границы большого круга из фокуса, в котором размещен центр притяжения, характеризует способность центра удерживать возле себя спутник. Вектор из второго фокуса показывает кинетические способности спутника противостоять этому притяжению. Пересече-

ние радиус-вектора с вектором скорости определяет точку орбиты спутника и его скорость.

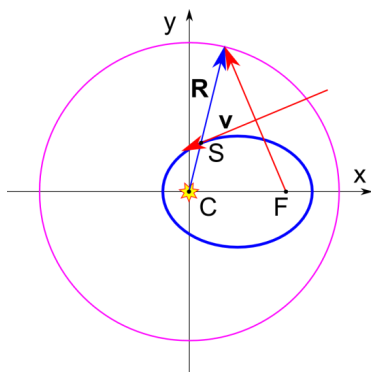


Рис. 29. Разные роли фокусов в формировании орбиты спутника

400 лет назад Кеплер своими законами сделал второй знаменательный шаг на пути постижения природы движения космических тел. Первый шаг за сто лет до него сделал Коперник, поместив в центр системы вращающихся планет Солнце. Но ни у Коперника, ни у кого-либо другого не возникало даже сомнения в том, что все вращения планет — это равномерное движение по окружностям. Иначе и быть не могло: ведь божественное движение небесных сфер достойно самого совершенного устройства.

Разногласия с наблюдениями долго пытались компенсировать с помощью нагромождения эпициклов — дополнительных окружностей. И только Кеплер с большим внутренним терзанием и сожалением, под натиском неумолимых фактов решился провозгласить движение планет по эллипсам.

Спустя еще сто лет после Кеплера великий Ньютон на основании законов Кеплера сделал третий, решающий шаг — открыл закон всемирного тяготения. Родилась физика — наблюдаемые математические закономерности движения получили обоснование характером силы, его вызывающей. Ньютон решил обратную задачу.

Мы увидели, что движение по эллипсу удобно представить с помощью математической конструкции «гравитационный конус». Подсистема «двойной циферблат» связывает радиус-вектор со скоростью планеты и объясняет появление симметрии эллипса. Поэтому сегодня математические особенности орбиты, т. е. аналог 1-го закона Кеплера, можно

сформулировать так: «Каждая планета движется по эллипсу, один фокус которого совпадает с центром притяжения — Солнцем, а второй фокус совпадает с центром присоединенного годографа скорости в конструкции “двойной циферблат”».

## Литература

- [1] Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
- [2] Холшевников К. В., Титов В. Б. Задача двух тел: Учебн. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. — 180 с.
- [3] Суханов А. А. Астродинамика. — М.: ИКИ, 2010. — 204 с.
- [4] Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука, 1970. — 448 с.
- [5] Солнечная система / Ред.-сост. Сурдин В. Г. — М.: Физматлит, 2012. — 400 с.
- [6] Мирер С. А. Механика космического полета. Орбитальное движение: Учебн.-мет. пособие. — М.: МФТИ, 2013. — 106 с.
- [7] Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений: Учебн. пособие. — СПб., 2006. — 61 с.
- [8] Гарднер М. Новые математические развлечения. — М.: АСТ; Астрель, 2009. — 319 с.
- [9] Бутиков Е. И. Огибающая семейства эллиптических орбит и баллистических траекторий // Компьютерные инструменты в образовании. — 2016. — № 3. — С. 50–65.
- [10] Гивенталь А. Б. Замечание // Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы-3, Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 3, ВИНТИ. — М., 1985. — 304 с.
- [11] Семиков С. А. Конические сечения в помощь будущему астроштурману // Инженер. — 2005. — № 7. — С. 16–19.
- [12] Givental A. Kepler's Laws and Conic Sections // Arnold Math J. (2016) 2:139–148. — URL: [https://math.berkeley.edu/~giventh/kepler\\_091615.pdf](https://math.berkeley.edu/~giventh/kepler_091615.pdf).
- [13] Boyadzhiev I. Some fascinating properties of the conic sections. GeoGebra. 2015. — URL: <https://www.geogebra.org/m/NwzcaSUu>.
- [14] Гивенталь А. Б. в частной переписке с автором.
- [15] Ижевский центр интеллектуального и творческого развития «АЛЕФ». — URL: <http://alefmth.ru/>.
- [16] Засов А. В., Кононович Э. В. Астрономия. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Физматлит, 2015. — 258 с.



*Научно-популярное издание*

***Сергей Васильевич Пахомов***  
***к. ф.-м. н., заслуженный журналист УР***

## **ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОНУС**

*Технический редактор А. В. Бакиев*  
*Компьютерный набор и верстка А. И. Ереметовой*  
*Корректор А. В. Бекмачева*

---

Подписано в печать 27.12.16. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. 2,33. Уч. изд. л. 2,45. Гарнитура Таймс.  
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Заказ № 17-14.  
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»  
426034, г. Ижевск, ул. Кооперативная, д. 5  
<http://shop.rcd.ru> E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru) Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

---

ISBN 978-5-4344-0417-4



9 78 5 434 404174